

Détection et Estimation

Les fonctions erf(x), erfc(x), I(x) et Q(x)

L'expression de la fonction densité de probabilité (fdp) ou pdf en anglais Gaussienne, aussi appelée distribution normale est donnée par:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \text{ pour tout } x \quad (\text{A.1})$$

où m et σ désignent la moyenne et l'écart type de X , respectivement, satisfaisant les conditions $-\infty < m < \infty$ et $\sigma > 0$.

L'expression de la fonction de distribution cumulative (fdc) ou cdf en anglais de (A.1) est donnée par:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right] du \quad (\text{A.2})$$

En posant $y = (u-m)/\sigma$ dans (A.2), on obtient alors l'expression de la cdf de la fonction erreur (error function en anglais):

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] \quad (\text{A.3})$$

où

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (\text{A.4})$$

Par ailleurs, l'expression de la distribution normale standard ou standard normal distribution, de moyenne $m = 0$ and variance $\sigma^2 = 1$. Elle est notée $N(0,1)$. Elle est donnée par:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (\text{A.5})$$

On définit alors $I(x)$ par:

$$I(x) \triangleq F_x(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{A.6})$$

Les valeurs de $I(x)$ et $\operatorname{erf}(x)$ sont données dans les Tableaux A.1 et A.2, respectivement.

D'autres expressions importantes sont celles des fonctions complémentaires (complementary error function en anglais) et de la fonction-Q (*Q-function* en anglais), données par :

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du \quad (\text{A.7})$$

tel que

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) \quad (\text{A.8})$$

et

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (\text{A.9})$$

où

$$Q(0) = \frac{1}{2} \quad (\text{A.10})$$

et

$$Q(-x) = 1 - Q(x) \quad (\text{A.11})$$

La Q-fonction peut s'écrire en fonction de l'error function comme suit:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{A.12})$$

On peut facilement démontrer que:

$$I(x) + Q(x) = 1 \quad (\text{A.13})$$

$$I(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right] = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{A.14})$$

et

$$Q(x) \cong \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ pour } x > 4 \quad (\text{A.15})$$

Tableau A.1 Quelques valeurs de $I(x)$

$$I(x) \triangleq \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = P(X \leq x)$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.0	0.0013	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0238	0.0233
-1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0300	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0570	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Tableau A.1 (Suite et fin) Quelques valeurs de $I(x)$

$$I(x) \triangleq \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = P(X \leq x)$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

Tableau A.2 Quelques valeurs de $\text{erf}(x)$

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

x	$\text{erf}(x)$	x	$\text{erf}(x)$	x	$\text{erf}(x)$	x	$\text{erf}(x)$
0.00	0.00000	0.25	0.27633	0.50	0.52050	0.75	0.71116
0.01	0.01128	0.26	0.28690	0.51	0.52924	0.76	0.71754
0.02	0.02256	0.27	0.29742	0.52	0.53790	0.77	0.72382
0.03	0.03384	0.28	0.30788	0.53	0.54646	0.78	0.73001
0.04	0.04511	0.29	0.31828	0.54	0.55494	0.79	0.73610
0.05	0.05637	0.30	0.32863	0.55	0.56332	0.80	0.74210
0.06	0.06762	0.31	0.33891	0.56	0.57162	0.81	0.74800
0.07	0.07885	0.32	0.34913	0.57	0.57982	0.82	0.75381
0.08	0.09007	0.33	0.35928	0.58	0.58792	0.83	0.75952
0.09	0.10128	0.34	0.36836	0.59	0.59594	0.84	0.76514
0.10	0.11246	0.35	0.37938	0.60	0.60386	0.85	0.77067
0.11	0.12362	0.36	0.38933	0.61	0.61168	0.86	0.77610
0.12	0.13476	0.37	0.39921	0.62	0.61941	0.87	0.78144
0.13	0.14587	0.38	0.40901	0.63	0.62705	0.88	0.78669
0.14	0.15695	0.39	0.41874	0.64	0.63459	0.89	0.79184
0.15	0.16800	0.40	0.42839	0.65	0.64203	0.90	0.79691
0.16	0.17901	0.41	0.43797	0.66	0.64938	0.91	0.80188
0.17	0.18999	0.42	0.44747	0.67	0.65663	0.92	0.80677
0.18	0.20094	0.43	0.45689	0.68	0.66378	0.93	0.81156
0.19	0.21184	0.44	0.46623	0.69	0.67084	0.94	0.81627
0.20	0.22270	0.45	0.47548	0.70	0.67780	0.95	0.82089
0.21	0.23352	0.46	0.48466	0.71	0.68467	0.96	0.82542
0.22	0.24430	0.47	0.49375	0.72	0.69143	0.97	0.82987
0.23	0.25502	0.48	0.50275	0.73	0.69810	0.98	0.83423
0.24	0.26570	0.49	0.51167	0.74	0.70468	0.99	0.83851
0.25	0.27633	0.50	0.52050	0.75	0.71116	1.00	0.84270

Tableau A.2 (Suite et fin) Quelques valeurs de $\operatorname{erf}(x)$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

x	$\operatorname{erf}(x)$	x	$\operatorname{erf}(x)$	x	$\operatorname{erf}(x)$	x	$\operatorname{erf}(x)$
1.00	0.84270	1.25	0.92290	1.50	0.96611	1.75	0.98667
1.01	0.84681	1.26	0.92524	1.51	0.96728	1.76	0.98719
1.02	0.85084	1.27	0.92751	1.52	0.96841	1.77	0.98769
1.03	0.85478	1.28	0.92973	1.53	0.96952	1.78	0.98817
1.04	0.85685	1.29	0.93190	1.54	0.97059	1.79	0.98864
1.05	0.86244	1.30	0.93401	1.55	0.97162	1.80	0.98909
1.06	0.86614	1.31	0.93606	1.56	0.97263	1.81	0.98952
1.07	0.86977	1.32	0.93807	1.57	0.97360	1.82	0.98994
1.08	0.87333	1.33	0.94002	1.58	0.97455	1.83	0.99035
1.09	0.87680	1.34	0.94191	1.59	0.97546	1.84	0.99074
1.10	0.88021	1.35	0.94376	1.60	0.97635	1.85	0.99111
1.11	0.88353	1.36	0.94556	1.61	0.97721	1.86	0.99147
1.12	0.88679	1.37	0.94731	1.62	0.97804	1.87	0.99182
1.13	0.88997	1.38	0.94902	1.63	0.97884	1.88	0.99216
1.14	0.89308	1.39	0.95067	1.64	0.97962	1.89	0.99247
1.15	0.89612	1.40	0.95229	1.65	0.98038	1.90	0.99279
1.16	0.98910	1.41	0.95385	1.66	0.98110	1.91	0.99308
1.17	0.90200	1.42	0.95530	1.67	0.98181	1.92	0.99338
1.18	0.90484	1.43	0.95686	1.68	0.98249	1.93	0.99366
1.19	0.90761	1.44	0.95830	1.69	0.98315	1.94	0.99392
1.20	0.91031	1.45	0.95970	1.70	0.98379	1.95	0.99418
1.21	0.91296	1.46	0.96105	1.71	0.98441	1.96	0.99442
1.22	0.91553	1.47	0.96237	1.72	0.98500	1.97	0.99466
1.23	0.91805	1.48	0.96365	1.73	0.98558	1.98	0.99489
1.24	0.92051	1.49	0.96490	1.74	0.98613	1.99	0.99511
1.25	0.92290	1.50	0.96611	1.75	0.98667	2.00	0.99532